فصل ۲

خواص الکتریکی مواد

# Electrical properties of Materials

chapter 7

بخش ۷

## Electrical Conduction in metals and Alloys

رسانش الکتریکی در فلزات و آلیاژها

## 7.1. Introduction

7.1 مقدمه

احتمالاً اولین مشاهدات پدیده های الکتریکی، مطالعه ی الکتریسیته ی ساکن بوده است.

- 600 BC، فیلسوفی یونانی به نام Thales of Miletus

کشف جاذبه ی بین کهربای (amber) مالیده شده با لباس و پر (Feather)

- واژه ی یونانی elektron به معنای amber ← electricity

- اوایل 1700، Stephen Gray ← بعضی مواد رسانا هستند و بعضی نارسانا

- 1733، DUFAY ← وجود دو نوع الکتریسیته ← amber electricity / glass electricity

دانشمندان معروف این عرصه:

Coulomb, Galvani, volta, oersted, Ampère, ohm, Seebeck, Faraday, Hery, Maxwell, Thomson and others

تلاش آنها منجر به تکنولوژی ای شد که ما از آن بهره می بریم.

Drude, 1900 ← فهم پدیده های الکتریکی در مقیاس اتمی
و ارائه فرمولی برای رسانندگی σ

چند دهه بعد ← پالایش درک ما از پدیده های الکتریکی با استفاده از
مکانیک کوانتومی

## 7.2 Survey

یکی از مشخصه‌های اصلی مواد، توانایی یا عدم توانایی مواد در رسانش جریان الکتریکی است. از این حیث مواد به گروه‌های زیر تقسیم می‌شوند:

۱- رسانا (conductors)

۲- نیمرسانا (semiconductors)

۳- عایق (insulators or dielectrics)

رسانندگی، $\sigma$، در دمای اتاق در مواد مختلف می‌تواند به اندازه ۲۵ مرتبه‌ی بزرگی می‌تواند فرق داشته باشد. (شکل 7.1) این اختلاف اگر ابررساناها در دمای پائین را در نظر بگیریم به ۴۰ مرتبه‌ی بزرگی نیز می‌رسد.

(رسانندگی در ابررساناها $10^{20}\ \frac{1}{\Omega\,cm}$)

این اختلاف در یک خاصیت فیزیکی در مواد مختلف، بیشترین گستره است و قابل مقایسه با گستره‌ی طول قطر جهان ($10^{26}$ m) و شعاع الکترون ($10^{-14}$ m) است.

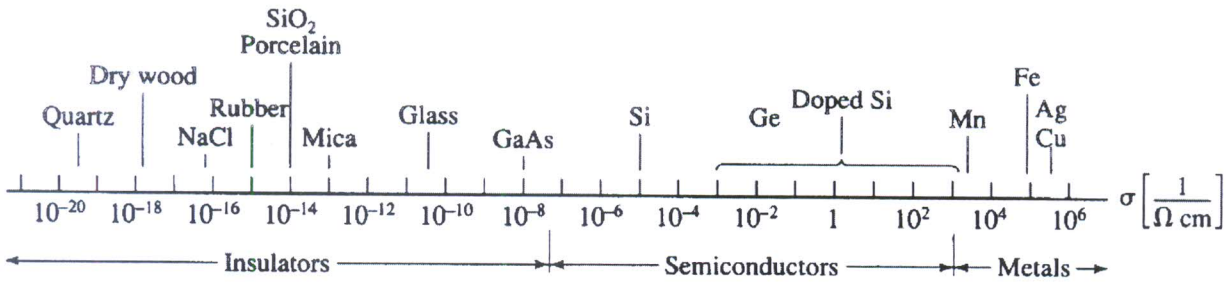



Figure 7.1 Room-temperature conductivity of various materials.

در فلزات و آلیاژها ← الکترون های ظرفیت نقش مهمی در رسانش الکتریکی بازی می کنند.

تئوری الکترون در قسمت های آتی طرح می شود ولی قبل از آن بعضی مفاهیم پایه توضیح داده می شود. این قانون ها از مشاهدات تجربی به دست آمده است.

Ohm's Law

قانون اهم

$$V = R\,I \quad (7.1)$$

$V$ → potential difference (volts)

$R$ → resistance (ohm i.e. $\Omega$)

$I$ → electrical current, $I$ (in amps)

شکل دیگر قانون اهم:

$$j = \sigma \mathcal{E} \quad (7.2)$$

$j$ → current density, $j = \frac{I}{A}$ $\left(\frac{A}{cm^2}\right)$

$\sigma$ → conductivity $\left(\frac{1}{\Omega\, cm}\right)$

$\mathcal{E}$ → electric field strength, $\mathcal{E} = \frac{V}{L}$ $\left(\frac{V}{cm}\right)$ (7.3)

چگالی جریان $j = N v e$ (7.4)

$N$ → تعداد الکترون ها بر واحد حجم

$v$ → سرعت الکترون ها

$e$ → بار الکترون

$$R = \frac{L \rho}{A} \quad (7.4a)$$

resistance ← $R$

$L$ → طول رسانا

$A$ → سطح مقطع رسانا

$\rho$ → مقاومت ویژه → specific resistance or resistivity ($\Omega$ cm)

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (7.4b)$$

در فصل ۲ دیدیم که دو انتخاب برای توصیف الکترون وجود دارد.
(توصیف ذره‌ای و توصیف موجی). مقاومت الکتریکی را می‌توان با این
تعابیر توضیح داد.

- توصیف ذره‌ای :

برخورد الکترون های در حال حرکت با اتم های شبکه ← مقاومت الکتریکی

برخوردهای بیشتر ← مقاومت الکتریکی بیشتر

توصیف ذره‌ای رفتارهای زیر را توضیح می دهد :

- افزایش مقاومت الکتریکی با افزایش نقص های شبکه
- افزایش مقاومت الکتریکی با افزایش دما

افزایش دما باعث افزایش ارتعاشات شبکه می‌شود که این امر
احتمال برخورد الکترون های در حال حرکت با اتم های شبکه را افزایش
می دهد.

- توصیف موجی :

پراکندگی تابع موج الکترون ها بوسیله‌ی اتم‌های شبکه ← مقاومت الکتریکی

scattering is the dissipation of radiation on small particles in all directions.

اتم های انرژی امواج رسیده به آن‌ها را جذب می‌کنند و شروع به نوسان می‌کنند.
این نوسانگرها انرژی را بصورت امواج کروی باز گسیل می‌کنند. اگر این امر برای همه‌ی
اتم ها در نظر گرفته شود، باید رابطه‌ی فاز بین این امواج بازگسیلی را مد نظر قرار داد.

محاسبات نشان می دهد که در ساختار بلوری تناوبی این امواج بازگسیلی هم‌فازند و تداخل آنها سازنده است. در نتیجه وقتی الکترون (موج) در بلور ایده‌آل انتشار می‌یابد تغییری در شدت و جهت را تجربه نمی‌کند. (فقط سرعت اصلاح می‌شود) ← این مکانیزم پراکندگی هموس نامیده می‌شود.

Coherent scattering

اگر مراکز پراکندگی تناوب خود را از دست دهند یا تناوب آن تضعیف شود. این کاهش تناوب به دلایل زیر می‌تواند باشد:

۱- ناخالصی ها — impurity

۲- تهی جاها — vacancies

۳- مرزدانه ها — grain boundries

۴- ارتعاشات گرمایی اتم ها — thermal vibration of atoms

در این صورت امواج بازگسیلی ارتباط فازی خاصی وجود ندارد که به آن پراکندگی غیرهموس می‌گویند:

incoherently scattered

انرژی امواج غیرهموس پراکنده شده در جهت جلو کمتر است و این از دست رفتن انرژی به طور کیفی مقاومت را توضیح می دهد.

با توصیف موجی درک عمیق تری از مقاومت می‌توان داشت. در ادامه رسانش الکتریکی با استفاده از مفاهیم ذره و موج بررسی می شوند.

## 7.3. Condutivity — classical Electron Theory

رهیافت اول برای فهم رسانش الکتریکی:

کار Drude ← در نظر گرفتن الکترون های والانسی اتم های یک بلور

به صورت گاز الکترونی یا پلاسما

electron gas  plasma

فرض: ← سهم هر اتم یک الکترون در گاز الکترونی

مثل فلزات تک ظرفیتی مثل سدیم

$$\frac{\text{number of atoms}}{\text{cubic centimeter}} \leftarrow N_a = \frac{N_0 \delta}{M} \qquad (7.5)$$

$N_0$ → Avogadro constant

$\delta$ → density

$M$ → جرم اتمی عنصر

برای فلز تک ظرفیتی: $10^{22}$ تا $10^{23}$ الکترون آزاد بر $cm^3$

حرکت تصادفی الکترون ها ⟶ no net velocity

اعمال میدان الکتریکی ⟶ net drift of the electrons

با قانون دوم نیوتن می توان آن را بررسی کرد: $(F = ma)$

$$m \frac{dv}{dt} = e\mathcal{E} \qquad (7.6)$$

$m$ → جرم الکترون

$e$ → بار الکترون

$\mathcal{E}$ → میدان الکتریکی

پیامد 7.6 ← تا وقتی میدان الکتریکی وجود دارد، الکترون ها با شتاب ثابت حرکت می کنند.

وقتی میدان الکتریکی قطع شود، الکترون ها با سرعت ثابت در بلور حرکت می کنند.

این دو پیامد معمولاً مشاهده نمی شود.

مدل الکترون آزاد (Free electron model) جهت توجیه مقاومت الکتریکی باید اصلاح شود.

الکترون ها با اعمال میدان الکتریکی شتاب ثابتی می یابند، اما برخوردهای الکترون با اتم های بلور باعث می شود الکترون های نیروی مقاومتی (اصطکاکی) را تجربه کنند، این نیروی مقاومتی تا جایی زیاد می شود که با نیروی میدان الکتریکی برابر شود در آن لحظه نیروی کل صفر می شود یعنی شتاب صفر می شود و الکترون به سرعت بیشینه ی خود می رسد که به آن سرعت سوق می گویند.
drift velocity

علاوه بر اتم های بلور عواملی چون ناخالصی ها، تهی جاها، نقص ها، مرزدانه ها و غیره نیز می توانند منشاء این نیروی اصطکاکی باشند:

$$m\frac{dv}{dt} + \gamma v = e\mathcal{E} \qquad (7.7)$$

$\gamma$ یک ثابت است.

نیروی اصطکاکی
friction

در واقع مثل اینکه الکترون در یک محیط "viscous" حرکت می کند.

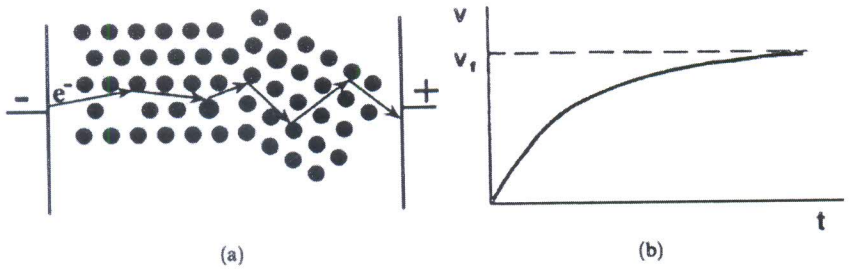



Figure 7.2. a) Schematic representation of an electron path through a conductor
b) Velocity distribution of electrons due to an electrostatic force and a counteracting friction force

برای $v = v_F$ داریم $\frac{dv}{dt} = 0$ پس:

$$\gamma v_F = e\mathcal{E} \longrightarrow \gamma = \frac{e\mathcal{E}}{v_F} \qquad (7.9)$$

(7.8)

پس رابطه‌ی 7.7 می‌شود:

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{e\mathcal{E}}{v_F} v = e\mathcal{E} \qquad (7.10)$$

جواب این معادله‌ی دیفرانسیل عبارت است از (problem 8):

$$v = v_F\left[1 - \exp\left(\frac{-e\mathcal{E}}{m v_F} t\right)\right] \qquad (7.11)$$

ضریب $\frac{m v_F}{e\mathcal{E}}$ از جنس زمان است. آن را $\tau$ یا زمان واهلش معرفی می‌کنیم.

relaxation time

$$\leftarrow \tau = \frac{m v_F}{e\mathcal{E}} \qquad (7.12)$$

تعبیر زمان واهلش ← زمان میانگین دو برخورد پشت سر هم

$$v_F = \frac{\tau e \mathcal{E}}{m} \qquad (7.13)$$

$\longrightarrow$ چگالی جریان $j = N_F v_F e = \sigma \mathcal{E}$

تعداد الکترون‌های آزاد بر $cm^3$

$$j = \frac{N_F \tau e^2}{m}\mathcal{E} \longrightarrow \boxed{\sigma = \frac{N_F e^2 \tau}{m}} \qquad 7.15$$

رابطه‌ی Drude

رسانندگی $= \frac{1}{\rho}$

رسانندگی به تعداد الکترون‌های آزاد و زمان واهلش بستگی دارد.

mean free path

طول پویش آ

$$\leftarrow l = v\tau$$

فاصله میانگین دو برخورد

## 7.4. Conductivity – Quantum Mechanical Consideration

الکترون های فلزی در حالت تعادلی به علت حرکت تصادفی ، سرعت مرجحی در راستای خاصی ندارند . می‌توان از فضای سرعت (velocity space) استفاده کرد .
( Fig 7.3(a))

نقاط داخل کره یا نقاط داخل دایره در حالت 2D ← معادل انتهای بردارهای سرعت مربوط به الکترون ها

سرعت بیشینه الکترون ها در $T=0$ ← سرعت فرمی $v_F$
Fermi velocity
سرعت الکترون ها دارای انرژی فرمی

کره‌ی دارای شعاع $v_F$ ← سطح فرمی

همه ی نقاط داخل سطح فرمی اشغال شده است . ← جمع سرعت کل آنها برابر صفر است .

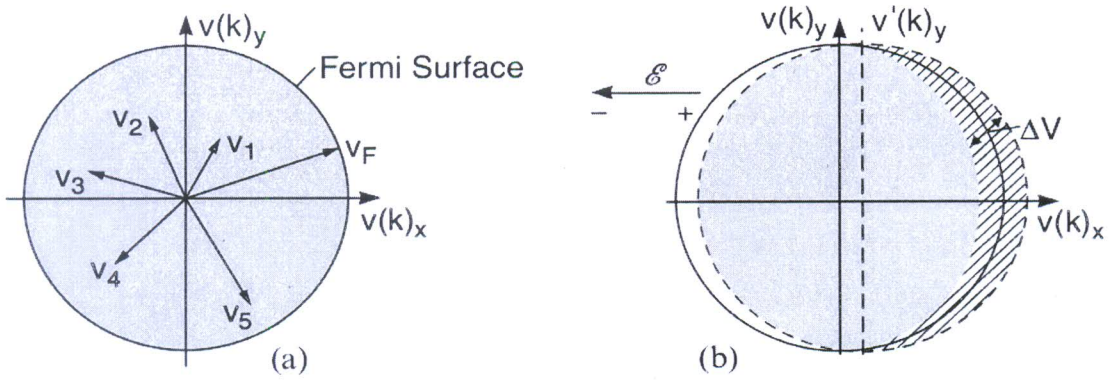



Fig 7.3. Velocity of electrons in two-dimensional velocity space (a) Equilibrium and (b) when an electric field is applied

اگر میدان الکتریکی اعمال شود ← سطح فرمی در جهت عکس میدان الکتریکی جابه جا می شود.

↓

سرعت کل غیرصفر می شود. (Fig 7.3(b) dashed circle)

قسمت های زیادی از سرعت های الکترون ها یکدیگر را خنثی می کنند (Fig 7.3(b) shaded area)

اما قسمت هایی خنثی نمی شود که منجر به جریان الکتریکی می شود.

با این حساب توصیف Drude باید اصلاح شود.

در توصیف کلاسیک ← میدان الکتریکی اعمال شده روی همه ی الکترون ها اثر می گذارد. همه ی الکترون ها در رسانش شرکت می کنند.

در توصیف کوانتومی ← فقط الکترون های خاصی در رسانش شرکت می کنند: الکترون های سطح فرمی با سرعت فرمی $v_F$

بالاترین انرژی ای که برای الکترون در $T=0$ می توان متصور شد انرژی فرمی $E_F$ است. مقدار زیادی از الکترون ها دارای این انرژی هستند، لذا چگالی حالات و چگالی جمعیت نزدیک $E_F$ (around $E_F$) بیشترین مقدار است. (Fig 7.4).

وقتی میدان ع اعمال می شود ← مقدار میانگین سرعت را با $v_F$ می توان تقریب زد.

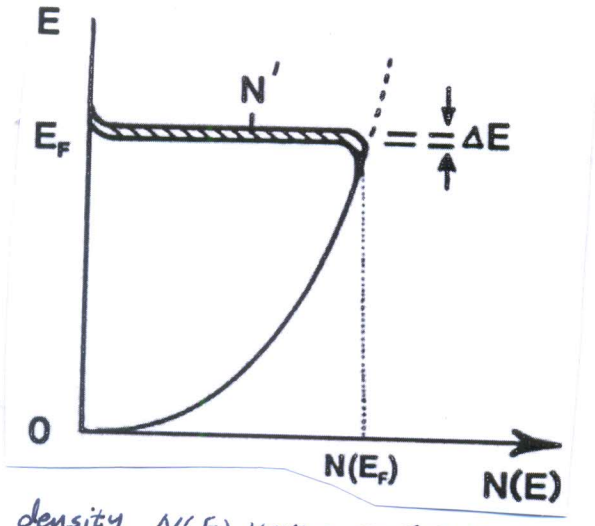



Fig 7.4. Population density $N(E)$ versus energy for free electrons (see Fig 6.5) and displacement $\Delta E$ by an electric field (see Fig. 7.3.(b))

■ محاسبه‌ی رسانندگی با به کاربستن مکانیک کوانتومی

$$j = \sigma \mathcal{E} = \text{تعداد الکترون‌ها} \times \text{سرعت الکترون} \times \text{بار الکترون}$$

در این حالت

$$j = N' v_F e \longrightarrow \text{بار الکترون} \qquad 7.16$$

$N'$: تعداد الکترون‌های جابجا شده بر واحد حجم

$v_F$: الکترون‌هایی که در رسانش نقش دارند: الکترون‌های سطح فرمی

$$N' = N(E_F)\,\Delta E \qquad (7.17)$$

$$j = v_F e N(E_F)\,\Delta E = v_F e N(E_F) \frac{dE}{dk}\,\Delta k. \qquad (7.18)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \longrightarrow dE = \frac{\hbar^2}{2m} 2k\,dk \longrightarrow \frac{dE}{dk} = \frac{\hbar^2}{m} k = \frac{\hbar^2 p}{m\hbar} = \frac{\hbar m v_F}{m} = \hbar v_F$$

$$\frac{dE}{dk} = \hbar v_F \qquad (7.20)$$

$$j = v_F^2 e N(E_F)\,\hbar\,\Delta k. \qquad (7.21)$$

محاسبه‌ی $\Delta k$ :

$$F = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt} = \hbar\frac{dk}{dt} = e\mathcal{E}, \qquad (7.22)$$

$$dk = \frac{e\mathcal{E}}{\hbar}dt \longrightarrow \Delta k = \frac{e\mathcal{E}}{\hbar}\Delta t = \frac{e\mathcal{E}}{\hbar}\tau, \qquad (7.23)$$

زمان بین دو برخورد.

جایگذاری $\Delta k$

$$j = v_F^2 e N(E_F)\hbar\Delta k \longrightarrow j = v_F^2 e^2 N(E_F)\mathcal{E}\tau. \qquad (7.24)$$

نکته : وقتی میدان الکتریکی در جهت منفی $V(k)_x$ اعمال می‌شود، باید فقط مولفه‌هایی از $V_F$ را در نظر بگیریم که در جهت مثبت $V(k)_x$ است. فقط $v_{Fx} = v_F\cos\theta$ در رسانش نقشی دارد. مجموع این مولفه‌ها را با انتگرال‌گیری محاسبه می‌کنیم : (شکل 7.5)

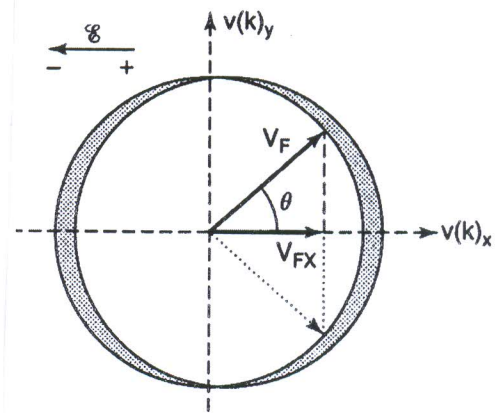
Figure 7.5. Two-dimensional velocity space.

$$j = e^2 N(E_F)\mathcal{E}\tau\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(v_F\cos\theta)^2\frac{d\theta}{\pi}$$

$$= e^2 N(E_F)\mathcal{E}\tau\frac{v_F^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= e^2 N(E_F)\mathcal{E}\tau\frac{v_F^2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$j = \frac{1}{2}e^2 N(E_F)\mathcal{E}\tau v_F^2$$



محاسبه مشابه برای سطح فرمی کروی :

$$j = \frac{1}{3} e^2 v_F^2 \tau N(E_F) \mathcal{E} \qquad (7.25)$$

$$\Big\downarrow \; \sigma = j/\mathcal{E}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{3} e^2 v_F^2 \tau N(E_F)} \qquad (7.26)$$

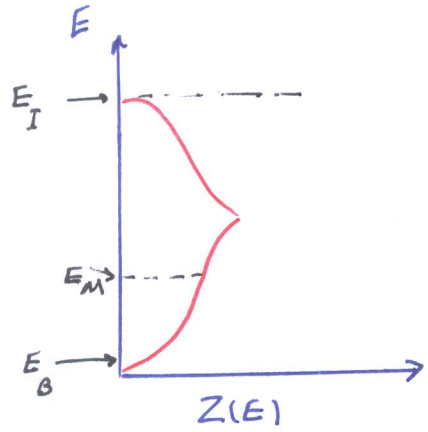
این معادله کوانتومی، بستگی رسانندگی به عوامل زیر را نشان می‌دهد :

۱- سرعت فرمی

۲- زمان واهلش

۳- چگالی جمعیت که با چگالی حالات متناسب است.

- الکترونهای سطح فرمی در رسانش نقش دارند.
- چگالی حالات در انرژی فرمی در رسانش نقش مهمی دارد.



valence band

$\sigma_M > \sigma_B$

$\sigma_I = 0$

Figure 7.6. Schematic representation of the density of states.

Examples for highest electron energies for a

monovalent metal ($E_M$) $\longrightarrow Z_M(E)$

for a bivalent metal ($E_B$) $\longrightarrow Z_B(E)$

and for an insulator ($E_I$) $\longrightarrow Z(E) = 0$

$Z_M(E) > Z_B(E)$

## 7.5 نتایج تجربی و تفسیرشان

## 7.5. Experimental Results and Their Interpretation