دینامیک در مغناطیس: ملاحظات عمومی

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده فیزیک، گروه ماده چگال تجربی

سید سجاد حسینی

sajjad.hosseini@ph.iut.ac.ir

مرداد ۹۴

در بسیاری از پدیده های فیزیکی، می خواهیم پاسخ یک سیستم را در برابر گونه ای از برانگیختگی مطالعه کنیم. اگر این برانگیختگی طیف سطح انرژی را دچار تغییر کند، یک کمیت ترمودینامیکی همیوغ با این برانگیختگی دچار تغییر خواهد شد. برای یک برانگیختگی به اندازه کافی *ضعیف*، پاسخ بصورت تابعی خطی از این برانگیختگی خواهد بود.

۱۱-۱-۱ پاسخ خطی و اتلاف

یک سیستم دلخواه را در نظر بگیرید که تحت اثر یک میدان مغناطیسی متناوب قرار دارد. تحت شرایط برانگیختگی متناوب یک پدیده ی اتلافی مشاهده می شود که ناشی از اختلاف فاز بین پاسخ و برانگیختگی است. این پدیده در مورد اتلاف های موجود در یک خازن، و نیز اتلاف مقاومتی مربوط به مقاومت یک القای L صحیح است. در مورد یک ماده مغناطیسی **پاسخ به برانگیختگی ناشی از یک میدان مغناطیسی متناوب** عبارت است از

$$\mu_0 H_a(t) = B_1 \cos \omega t$$

که باعث به وجود آمدن یک تغییر در مغناطش به اندازه اختلاف فاز δ خواهد شد:

$$M(t) = M_0 \cos(\omega t - \delta) = M_0(\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta),$$

و یا

$$M(t) = \frac{M_0 \cos \delta}{B_1} B_1 \cos \omega t + \frac{M_0 \sin \delta}{B_1} B_1 \sin \omega t.$$

بنابراین می توان نوشت

$$M(t) = \chi'(\omega) B_1 \cos \omega t + \chi''(\omega) B_1 \sin \omega t. \qquad (۱-۱۱)$$

با توجه به نوشتار مختلط $M(t) = B_1 e^{\mathrm{i}\omega t}$، می بینیم که معادله (۱۱-۱) متناظر با بخش حقیقی عبارت زیر است

$$\boxed{M(t) = \mathrm{Re}\{[\chi'(\omega) - \mathrm{i}\chi''(\omega)] B_1 e^{\mathrm{i}\omega t}\}}. \qquad (۲-۱۱)$$

بنابراین *پذیرفتاری مغناطیسی مختلط* را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - \mathrm{i}\chi''(\omega) = |\chi(\omega)|(\cos \delta - \mathrm{i} \sin \delta) \; .$$

توجه کنید که انرژی جذب شده متوسط توسط ماده در هر چرخه عبارت است از $T = 2\pi/\omega$ و در واحد حجم برابر خواهد بود با

$$W = -\int_0^T M \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

و یا

$$W = \int_0^T \omega B_1^2[\chi'(\omega)\sin\omega t\cos\omega t + \chi''(\omega)\sin^2\omega t]\mathrm{d}t = \pi\chi''(\omega)B_1^2\ ,$$

که توان جذب شده متناظر با آن عبارت است از

$$\boxed{P = \frac{\omega}{2}\chi''(\omega)B_1^2}\ . \qquad (۱۱-۳)$$

بنابراین مولفه ی کوادراتوری $\chi''(\omega)$ متناظر با *جذب* انرژی است، در حالیکه $\chi'(\omega)$ *پراکندگی* نامیده می شود. بخش حقیقی پذیرفتاری $\chi'(0)$ در فرکانس صفر *پذیرفتاری استاتیک* نامیده می شود.

۱۱-۱-۲ پاسخ پالسی و پاسخ فرکانسی

اکنون رابطه بین پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی را برای یک سیستم مغناطیسی بررسی می کنیم. در یک رژیم پاسخ خطی، یک میدان برانگیزاننده ی $B(t')$ که در زمان t' برای بازه ی زمانی $\mathrm{d}t'$ اعمال شده است، یک مغناطش به اندازه ی $m(t-t')B(t')\mathrm{d}t'$ در زمان t *بعد از آن* القا می کند. بنابراین مغناطش القا شده در زمان t توسط یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان $B(t')$ عبارت است از

$$M(t) = \int_{-\infty}^{t} m(t-t')B(t')\mathrm{d}t'\ . \qquad (۱۱-۴)$$

در این عبارت تابع $m(t)$ را می توان به عنوان تابع پاسخ زمانی به یک برانگیختگی پالسی در زمان $t'=0$ در نظر گرفت. [برای اثبات این موضوع یک برانگیختگی به صورت $b\tau\delta(t'=0)$ در نظر بگیرید که منجر به بدست آمدن این عبارت می شود: $M(t) = b\tau m(t)$.]

پاسخ به یک برانگیختگی سینوسی بصورت $B(t') = B_1\exp(\mathrm{i}\omega t')$ عبارت است از

$$M(t) = \int_{-\infty}^{t} m(t-t')B_1\exp(\mathrm{i}\omega t')\,\mathrm{d}t' = B_1\exp(\mathrm{i}\omega t)\int_{-\infty}^{t} m(t-t')\exp[\mathrm{i}\omega(t'-t)]\,\mathrm{d}t'$$

$$= B_1\exp(\mathrm{i}\omega t)\int_0^{\infty} m(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

و از مقایسه با معادله (۱۱-۱) داریم

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} m(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}t\ , \qquad (۱۱-۵)$$

و درنتیجه داریم

$$\boxed{m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}\omega}\ . \qquad (۱۱-۶)$$

می توان گفت که به طور کلی در رژیم پاسخ خطی، پاسخ فرکانسی و پاسخ پالسی از طریق تبدیل فوریه به هم مربوط هستند.

توجه کنید که این روابط با فرض اینکه سیستم دارای پاسخ خطی، ساکن، و علّی است بدست آمده اند. دو شرط اول مذکور نیازمند تابعی خطی هستند که تنها به $t-t'$ و همچنین یک پاسخ تکفام برای یک برانگیختگی تکفام وابسته باشد. *رابطه ی علیت* برخاسته از این واقعیت که پاسخ نمی تواند مقدم بر علت باشد، منجر به بدست آمدن تابع پاسخ $m(t)$ خواهد شد که این تابع به ازای $t<0$ صفر بوده، و به ازای تمام t ها حقیقی است، زیرا این تابع متناظر با پاسخ فیزیکی به یک برانگیختگی حقیقی $\delta(0)$ است. به طور کلی می توان نشان داد که این شرایط نیازمند این است که توابع $\chi'(\omega)$ و $\chi''(\omega)$ به یکدیگر وابسته باشند. اگر یکی از آنها به ازای تمام ω ها مشخص باشد، می توان دیگری را از طریق روابط کرامرز-کرونیگ به طور کامل تعیین کرد [۱]:

$$\chi'(\omega)-\chi'(\infty)=\pi^{-1}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' ,$$

$$\chi''(\omega)=-\pi^{-1}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi'(\omega')-\chi'(\infty)}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' , \qquad (۷-۱۱)$$

که در آن P نشان دهنده ی بخش اصلی است، یعنی

$$\mathrm{P}=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon}+\int_{\omega+\varepsilon}^{\infty}\right).$$

در این عبارت ها که در مورد بسیاری از توابع پاسخ دیگر نظیر ثابت دی الکتریک صدق می کنند، بخش موهومی پاسخ یعنی χ'' به ازای $\omega\longrightarrow\infty$ صفر می شود، در غیر این صورت توان جذب شده به بینهایت میل خواهد کرد[۱]. همچنین توجه کنید که χ'' طبق تعریف به ازای $\omega=0$ صفر می شود. در بخش بعد برخی از حالت های ساده را مورد بحث قرار خواهیم داد.

---

[۱] هر چند که بخش حقیقی پاسخ به طور کلی می تواند به ازای $\omega\longrightarrow\infty$ یک بخش متناهی نیز داشته باشد. این موضوع در مورد پذیرفتاری مغناطیسی صحیح نیست، زیرا هیچ سیستم فیزیکی وجود ندارد که برای آن مغناطش بتواند با یک برانگیختگی در فرکانس بینهایت ادامه داشته باشد. از سوی دیگر، اگر تراوایی مغناطیسی ، $\mu=1+\chi$ را به عنوان تابع پاسخ در نظر بگیریم، این شامل جمله ای است که متناظر با میدان مغناطیسی برانگیزاننده است، و به ازای $\omega\longrightarrow\infty$ داریم $\mu'\longrightarrow 1$. در معادله ی (۱۱-۷) جمله ی $\chi'(\infty)$ را با هدف کلی نگری نگه داشته ایم.

منابع:

H. Alloul, *Introduction to the Physics of Electron in Solids*, Springer (2011), pp. 319-322.

[۱] A. Abragam, *Principles of Nuclear Magnetism*, Oxford University Press, Oxford (1994)